



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФГБОУ ВО «ИГУ»  
Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ  
Декан Физического факультета И.М. Буднев  
«28» июня 2016 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Наименование дисциплины: Б1.Б.14.7 Теория функций комплексного переменного

Направление подготовки: 03.03.02 Физика

Тип образовательной программы: Академический бакалавриат

Направленность (профиль) подготовки: Физика конденсированного состояния

Квалификация (степень) выпускника: Бакалавр

Форма обучения: Очная

Согласовано с УМК физического факультета

Протокол №3 от «28» июня 2016 г.

Зам. председателя

В.В. Чумак

Рекомендовано кафедрой:

Протокол №8

От «13» мая 2016 г.

Зав. кафедрой

С.В. Ловцов

Иркутск 2016 г.

## Содержание

1. Цели и задачи дисциплины (модуля): .....	3
2. Место дисциплины в структуре ОПОП: .....	3
3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля): .....	3
4. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной работы (разделяется по формам обучения) .....	4
5. Содержание дисциплины (модуля) .....	4
5.1. Содержание разделов и тем дисциплины (модуля) .....	4
5.2. Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами.....	5
5.3. Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий.....	5
.....	5
6. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ .....	6
7. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ .....	6
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля): .....	6
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля):.....	7
10. Образовательные технологии: .....	7
11. Оценочные средства (ОС): .....	7
12. Приложение: ФОС.....	12

## **1. Цели и задачи дисциплины (модуля):**

Теория функций комплексной переменной является одним из заключительных разделов общего курса высшей математики, изучаемой студентами физиками. Фундаментальные понятия теории функций комплексной переменной находят широкое применение в большинстве разделов современной математики и физики.

Теория функций комплексной переменной связана с изучением аналитических функций. В данном курсе важнейшие понятия математического анализа функций действительной переменной, такие как предел, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость, ряд и его сходимость формулируются для функций комплексной переменной и изучаются их свойства. При этом возникают новые интересные аспекты, связанные с конформными отображениями и методами вычисления определенных интегралов от функций действительной переменной на основе понятий теории функций действительной переменной.

### **Цели курса**

Курс теории функций комплексной переменной направлен на развитие методов исследования функций в комплексной области и применение этих методов к задачам математического анализа. Формулируются базовые понятия математического анализа, такие как предел, непрерывность, производная, интеграл и ряд для комплексных функций, зависящих от комплексной переменной. Материалы данного курса используются при изучении курсов методы математической физики, классическая механика, электродинамика, квантовая механика, а также спецкурсов по теоретической физике. Знание методов теории функций комплексной переменной является необходимым элементом математического образования современного ученого-физика.

Поэтому цель курса – овладение основными понятиями теории функций комплексного переменного, формирование представлений о её методах и взаимосвязях с действительным анализом, а также с другими математическими дисциплинами

### **Задачи курса**

- сформировать представления об аналитических функциях, конформном отображении, комплексном интеграле, аналитическом продолжении, римановой поверхности и особых точках функции, рядах аналитических функций, вычетах;
- выработать умения и навыки дифференцирования функций комплексного переменного, построения конформных отображений простейших областей, вычисления комплексных интегралов, разложения функций в ряд Тейлора и ряд Лорана, а также вычисления вычетов функций;
- научить применять методы комплексного анализа для вычисления определённых и несобственных интегралов и решения других задач алгебры и анализа;
- познакомить с современными направлениями развития комплексного анализа.

## **2. Место дисциплины в структуре ОПОП:**

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» входит в базовую часть общенаучного цикла ОПОП. Изучение разделов курса предполагает использование полученных основных знаний, умений и компетенций на последующем уровне образования.

1. Для изучения дисциплины, необходимы знания и умения из читаемой на первом курсе дисциплины «Математический анализ».
2. Знания и умения, приобретаемые студентами после изучения дисциплины, будут использоваться при изучении Теоретических курсов физики.

## **3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля):**

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-2: способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей



увилля. Ряд Лорана. Правильная и главная части ряда Лорана. Теорема Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Устранимые особые точки. Нули аналитической функции. Полюс. Ряд Лорана в окрестности особой точки. Существенно особые точки. Мероморфная функция. Вычет функции. Вычеты в конечной устранимой точке. Вычисление вычета в полюсе и в существенно особой точке. Основная теорема теории вычетов. Вычет в бесконечно удаленной точке. Вычисление интеграла по замкнутому контуру.

**Тема 5. Расчет интегралов и суммирование рядов с помощью теории вычетов**

Вычисление интеграла Вычисление несобственных интегралов и интегралов от тригонометрических функций.

Суммирование рядов с помощью вычетов.

**Тема 6. Преобразование Лапласа и его свойства**

Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение. Свойства преобразования Лапласа. Таблица оригиналов и изображений. Нахождение изображений функций. Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа.

**Тема 7. Логорифмический вычет**

Логорифмический вычет. Теорема Руше. Основная теорема о корнях многочлена  $N$  – степени.

**Тема 8. Конформные отображения**

Конформное отображение. Необходимое и достаточное условие конформности отображения. Элементарные функции комплексного переменного. Линейная функция. Дробно – линейная функция. Круговое свойство дробно – линейного отображения. Свойство сохранения симметрии. Дробно – линейное отображение, переводящее три точки в три точки. Примеры дробно – линейных отображений.

**Тема 9. Приложения теории функций комплексного переменного к задачам физики**

Плоское течение жидкости. Обтекание контура. Применение преобразования Лапласа к расчету электрических контуров.

**5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами**

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов и тем данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин
1.	Предметы теоретической физики	1,2,3,4,5,6,7

**5.3. Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий**

№ п/п	Наименование темы	Виды занятий в часах					
		Лекц.	Практ. зан.	Семина	Лаб. Зан.	СРС	Всего
1.	Тема 1	4	4	-	-	1	9
2.	Тема 2	4	8	-	-	1	13
3.	Тема 3	4	8	-	-	1	13
4.	Тема 4	5	8	-	-	2	15
5	Тема 5	5	10	-	-	1	16
6	Тема 6	4	6	-	-	1	11

## 6. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

№ п/п	№ раздела и темы дисциплины (модуля)	Наименование семинаров, практических и лабораторных работ	Трудоемкость (часы)	Оценочные средства	Формируемые компетенции
1	2	3	4	5	6
1.	Тема 1	Комплексные числа, Функции комплексного переменного	4	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-2
2.	Тема 2	Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитические функции.	8	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-2
3.	Тема 3	Интеграл по комплексной переменной. Интеграл Коши	8	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-2
4.	Тема 4	Ряды аналитических функций. Теория вычетов	8	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-2
5.	Тема 5	Расчет интегралов и суммирование рядов с помощью теории вычетов	10	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-2
6.	Тема 6	Преобразование Лапласа и его свойства	6	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-2
7.	Тема 7	Логарифмический вычет Теорема Руше	4	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-2

## 7. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Учебным планом не предусмотрено написание курсовых работ (проектов)

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):

а) основная литература

1. Евграфов, М.А. Аналитические функции [Электронный ресурс] / М. А. Евграфов. - Москва : Лань, 2008. - 447 с. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-0809-2

2. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного: задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие для студ. вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. - 4-е изд., испр. - М.: КомКнига, 2006. - 205 с. - ISBN 5-484-00462-4 (96 экз.)

б) дополнительная литература

1. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. - 6-е изд., стер. - М. : Лань, 2002. - 688 с. - ISBN 5-9511-0014-3 (2 экз.)

2. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1982. - 488 с (3)

3. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников / А. Н. Тихонов. - 4-е изд., стер. - М. : Наука, 1979. - 319 с. (5) *Сверено с № 4115*

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

<http://library.isu.ru/> - Научная библиотека ИГУ;

Образовательные ресурсы, доступные по логину и паролю, предоставляемым Научной

библиотекой ИГУ:

- <https://isu.bibliotech.ru/> - ЭЧЗ «БиблиоТех»;
- <http://e.lanbook.com> - ЭБС «Издательство «Лань»;
- <http://rucont.ru> - ЭБС «Руконт» - межотраслевая научная библиотека, содержащая оцифрованные книги, периодические издания и отдельные статьи по всем отраслям знаний, а также аудио-, видео-, мультимедиа софт и многое другое;
- <http://ibooks.ru/> - ЭБС «Айбукс»- интернет ресурсы в свободном доступе;

### **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля):**

Для проведения занятий лекционного типа в качестве демонстрационного оборудования используется меловая доска. Наглядность обеспечивается путем изображения схем, диаграмм и формул с помощью мела. Использование глобальной компьютерной сети позволяет обеспечить доступность Интернет-ресурсов и реализовать самостоятельную работу студентов. На лекциях могут использоваться мультимедийные средства: проектор, переносной экран, ноутбук. На факультете имеется компьютеризированная аудитория, предназначенная для самостоятельной работы, с неограниченным доступом в Интернет.

Материалы: учебно-методические пособия, задания для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

### **10. Образовательные технологии:**

Задачи изложения и изучения дисциплины реализуются в следующих формах деятельности:

- лекции, нацеленные на получение необходимой информации, и ее использование при решении практических задач;
- практические занятия, направленные на активизацию познавательной деятельности студентов и приобретения ими навыков решения практических и проблемных задач;
- консультации –еженедельно для всех желающих студентов;
- самостоятельная внеаудиторная работа направлена на приобретение навыков самостоятельного решения задач по дисциплине;
- текущий контроль за деятельностью студентов осуществляется на лекционных и практических занятиях в ходе самостоятельного решения задач, в том числе у доски.

### **11. Оценочные средства (ОС):**

Фонд оценочных средств представлен в приложении.

11.1. Оценочные средства для входного контроля: не требуются.

#### **11.2. Оценочные средства текущего контроля.**

1. Определение комплексного числа. Операции сложения, умножения.
2. Мнимая единица. Комплексное сопряжение. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
3. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная форма.
4. Свойства операций с комплексными числами. Деление.
5. Геометрическая интерпретация комплексного числа.
6. Извлечение корней из комплексных чисел (примеры).
7. Последовательности комплексных чисел. Определение предела последовательности. Условия сходимости последовательности.
8. Критерий Коши сходимости последовательностей.
9. Расширенная комплексная плоскость. Бесконечно удаленная точка. Стереографическая проекция.
10. Определение функции комплексной переменной. Области, границы областей.
11. Функции комплексной переменной – однозначные, многозначные функции. Обратная функция. Однолистные функции.
12. Предел функции. Непрерывность в точке, условия непрерывности. Свойства непрерывных функций.

13. Элементарные функции и их свойства (на примере заданной функции)
14. Многозначные функции: ветви, точки ветвления.
15. Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.
16. Условия Коши-Римана : полярные координаты, условия для модуля и аргумента функции.
17. Аналитические функции. Определение, свойства.
18. Примеры производных элементарных функций.
19. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной.
20. Определение и условия конформного отображения.
21. Конформные отображения: соотношения для площади и длины образа кривой.
22. Интеграл по комплексной переменной – определение, свойства. Примеры для элементарных функций.
23. Интегральная формула Коши. Теорема Коши (непрерывная производная). Следствия теоремы Коши.
24. Неопределенный интеграл. Первообразная. Интеграл Коши
25. Следствия из интегральной формулы Коши.
26. Принцип максимума модуля аналитической функции.
27. Существование производных всех порядков у аналитической функции.
28. Ряды комплексных чисел. Условия сходимости.
29. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
30. Ряд Тейлора. Теорема Тейлора. Примеры
31. Нули аналитической функции. Теорема единственности.
32. Аналитической продолжение: продолжение с действительной оси. Примеры продолжения элементарных функций.
33. Ряд Лорана. Определение. Область сходимости.
34. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
35. Классификация изолированных особых точек.
36. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.
37. Вычеты: определение, свойства, формулы вычисления.
38. Основная теорема теории вычетов. Примеры. Вычет в бесконечно удаленной точке.
39. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов
40. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов
41. Интегралы от многозначных функций; вычисление с помощью вычетов.
42. Логарифмический вычет: определение, вычисление. Число нулей аналитической функции.
43. Теорема Руше. Основная теорема высшей алгебры.

### Демонстрационный вариант контрольной работы

Решение.  $z = \frac{2\sqrt{2}}{1+i} = \frac{2\sqrt{2}(1-i)}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$  - алгебраическая форма,

$$|z| = \sqrt{2+2} = 2, \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$z = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) - \text{тригонометрическая форма.}$$

2. Решение.  $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (-3 + 5)i = 6 + 2i$ ;  $z_1 z_2 = (2 - 3i)(4 + 5i) =$   
 $= (2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 \cdot i^2) + (2 \cdot 5 + (-3) \cdot 4)i = 23 - 2i$ ;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{4 + 5i} = \frac{(2 - 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{(8 - 15) + (-12 - 10)i}{16 + 25} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i.$$



3. Решение.  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))}{\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))}\right)^{20} =$   
 $= \frac{2^{20} e^{i \cdot 20\pi/3}}{2^{10} e^{i \cdot (-5\pi)}} = 2^{10} \frac{e^{i \cdot (6\pi + 2\pi/3)}}{e^{i \cdot \pi}} = 1024 \frac{e^{i \cdot 2\pi/3}}{-1} = -1024 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512(1 - i\sqrt{3}).$

4. Решение. 1. Выражаем  $z^3$  через  $x, y$ :  $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$   
 $= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = u + iv \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \\ v(x, y) = 3x^2y - y^3. \end{cases}$

2.  $w = e^z$ . Здесь  $u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y, \\ v(x, y) = e^x \sin y. \end{cases}$

5. Решение. 1. Проверим, что для функции  $f(z) = z^2$  выполняются условия Коши-Римана. Так как  $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ , то  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$ .

Тогда  $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i \cdot 2y = 2(x + iy) = 2z$ .

2. Для функции  $w = e^z$  мы получили  $u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $v(x, y) = e^x \sin y$ . Поэтому  $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , т.е. функция дифференцируема.

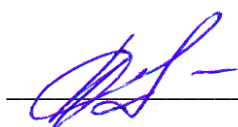
$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y = e^x(\cos y + i \cdot \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$ .

### Примерный перечень вопросов и заданий к экзамену

1. Понятие комплексного числа. Действия над комплексными числами и их геометрическое истолкование. Примеры.
2. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа. Примеры.
3. Сфера Римана. Расширенная комплексная плоскость. Множества точек на комплексной плоскости.
4. Функция комплексного переменного и ее предел.
5. Непрерывность функции комплексного переменного.
6. Производная функции комплексного переменного. Правила дифференцирования функции.
7. Производная функции комплексного переменного. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции (теорема).
8. Аналитическая функция, ее свойства.
9. Гармонические функции. Связь гармонической и аналитической функции (теорема).
10. Производная функции комплексного переменного. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции.
11. Конформное отображение. Примеры.
12. Элементарные функции комплексного переменного. Линейная функция.
13. Элементарные функции комплексного переменного. Дробно-линейная функция.
14. Элементарные функции комплексного переменного. Степенная функция.
15. Элементарные функции комплексного переменного. Показательная и логарифмическая функции.

16. Интеграл от функции комплексного переменного, его свойства.
17. Интегральная теорема Коши.
18. Интегральная формула Коши.
19. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля аналитической функции. Теорема Морера.
20. Числовые ряды. Общий критерий сходимости рядов. Абсолютно сходящиеся ряды. Перестановка членов ряда.
21. Числовые ряды. Общий критерий сходимости рядов. Сложение и умножение рядов.
22. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Примеры.
23. Степенные ряды. Теорема Абеля. Примеры.
24. Ряд Тейлора. Теорема Тейлора. Примеры.
25. Ряд Лорана. Теорема Лорана. Примеры.
26. Устранимые особые точки. Примеры.
27. Нули аналитической функции. Полюсы. Существенно особые точки. Примеры.
28. Целая функция. Теорема Лиувилля. Мероморфная функция.
29. Вычеты функции. Основная теорема теории вычетов.
30. Вычисление вычетов функции.
31. Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов.
32. Логарифмический вычет. Вычисление интеграла
33. Применение вычетов к вычислению несобственных интегралов.
34. Применение вычетов к вычислению интегралов от тригонометрических функций.
35. Преобразование Лапласа. Нахождение изображений функций.

**Разработчики:**



доцент кафедры теоретической физики С.В. Ловцов

Программа рассмотрена на заседании кафедры теоретической физики

«13» мая 2016 г.

Протокол № 8 Зав. кафедрой  С.В. Ловцов

**Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.**

**Лист согласования, дополнений и изменений  
на 2017/2018 учебный год**

К рабочей программе дисциплины Б1.Б.14.7 Теория функций комплексного переменного по направлению 03.03.02 Физика профилю Физика конденсированного состояния

В рабочую программу дисциплины вносятся следующие дополнения: нет дополнений.

Изменения одобрены Ученым советом физического факультета,  
протокол №8 от 19.06.2017 г.

Зав. кафедрой теоретической физики

С.В. Ловцов