МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФГБОУ ВО «ИГУ»
Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ

Декан ____________ Н.М. Буднев

«28» июня 2016 г.

Рабочая программа дисциплины

Наименование дисциплины: Б1.Б.14.4 Векторный и тензорный анализ

Направление подготовки: 03.03.02 Физика

Тип образовательной программы: Академический бакалавриат

Направленность (профиль) подготовки: Физика конденсированного состояния

Квалификация (степень) выпускника: Бакалавр

Форма обучения: Очная

Согласовано с УМК физического факультета

Протокол №3 от «*28*» июня 2016 г.

Зам. председателя ____________ В.В. Чумак

Рекомендовано кафедрой:
Протокол №8
От «13» мая 2016 г.

Зав. кафедрой ____________ **С.В. Ловцов**

Иркутск 2016 г.

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины (модуля):

Цели дисциплины

- Воспитание высокой математической культуры;
- Привитие навыков современных видов математического мышления;
- Привитие навыков использования методов и основ векторного и тензорного анализа в научной и инженерной деятельности.

Векторный и тензорный анализ дает мощные методы исследования скалярных, векторных (тензорных) полей, основанные на применении методов и понятий алгебры, а также дифференциального и интегрального исчисления. Векторный и тензорный анализ по праву является одним из ключевых элементов математического аппарата современной физики.

Целью курса в третьем семестре является изучение теории скалярных, векторных полей с позиций тензорного анализа, освоение технологий работы с тензорными объектами и операциями векторного анализа, освоение основополагающей идеи инвариантности величин, представляющих физические объекты, их трансформационных свойств.

Задачи дисциплины

Воспитание у студентов математической культуры включает в себя ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке, выработку представлений о роли и месте математики и конкретно векторного и тензорного анализа, умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений.

Освоение студентами на первом курсе понятий и методов дифференциального и интегрального исчисления для функций одной и нескольких переменных позволяет в третьем семестре дать систематическое изложение теории векторнозначных функций. Здесь используются также знания, полученные студентами в курсе линейной алгебры (2 семестр). Вводится фундаментальное понятие тензора, стрежневым является требование инвариантности теории относительно вращений декартовой системы координат. Это позволяет наиболее естественным и строгим образом определить алгебраические и дифференциальные операции векторного анализа, развить соответствующую технику вычислений, дать регулярное изложение интегральных соотношений векторного анализа.

Данный курс призван решать следующие задачи:

- овладение понятиями и методами векторного и тензорного анализа;
- повышение математической культуры применения методов и приемов определения математических понятий, понимание их физического смысла, доказательств теорем и утверждений, в том числе «на физическом уровне строгости»;
- формирование у студентов умений и навыков самостоятельного приобретения и применения знаний.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» входит в базовую часть ОПОП.

Входные знания, умения и компетенции студента соответствуют требованиям изученных к этому времени дисциплин «Математический анализ» (1-2йсеместр) и «Линейная алгебра».

Математическое образование студентов должно быть широким, общим, то есть достаточно фундаментальным. Фундаментальность математической подготовки включает в себя достаточную общность математических понятий и конструкций, обеспечивающую широкий спектр их применимости, разумную точность формулировок математических свойств изучаемых объектов, логическую строгость изложения математики, опирающуюся на адекватный современный математический язык. Векторный и тензорный анализ является одной из основ математического образования физика, основой изучения других математических дисциплин (теории дифференциальных уравнений, методов математической физики и т.д.) и фактически является языком физики.

Знания, полученные при изучении данного курса, являются важнейшим элементом математической культуры физика. Они составляют базу для дальнейшего глубокого освоения основных физических дисциплин – теоретической механики, электродинамики, квантовой механики, а также дисциплин по специальности.

3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля):

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-2: способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей	**Знать**: основы теории потенциальных векторных полей, основы работы с векторными полями в криволинейных ортогональных системах координат, выражения для дивергенции и лапласиана в декартовой системе координат **Уметь**: выполнять вычисления с векторами в различных системах координат. **Владеть**: приемами дифференцирования векторных и тензорных полей

Изучение курса способствует развитию общеобразовательных умений студента:
- приобретать новые знания, основываясь на полученных при изучении курса знаниях и умениях;
- собирать, обрабатывать и интерпретировать данные, необходимые для формирования суждений по соответствующим проблемам;
- использовать в познавательной и профессиональной деятельности навыки работы с информацией из различных источников;
- применять на практике и в научно-исследовательской деятельности базовые профессиональные знания;
- использовать полученные специализированные знания для освоения профильных физических дисциплин (в соответствии с профилем подготовки);
- понимать и излагать получаемую информацию.

4. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной работы (разделяется по формам обучения)

Вид учебной работы	Всего часов / зачетных единиц	**Семестры**			
		3	-	-	-
Аудиторные занятия (всего)	58/1,6	58	-	-	-
В том числе:	-	-	-	-	-
Лекции	18/0.5	18	-	-	-
Практические занятия (ПЗ)	36/1	36	-	-	-
Самостоятельная работа студентов	14/0,4	14	-	-	-
КСР	4/0,1	4	-	-	-
Контактная работа	59/1,6	59			
Вид промежуточной аттестации: зачет	-	-	-	-	-
Общая трудоемкость часы	72	72	-	-	-
зачетные единицы	2	2	-	-	-

5. Содержание дисциплины (модуля)

5.1. Содержание разделов и тем дисциплины (модуля). Все разделы и темы нумеруются.

1. Алгебра тензоров Преобразование компонент трехмерного вектора при вращении системы координат, ортогональность матрицы вращения. Определение тензора n-го ранга. Алгебра тензоров: внешнее произведение, теорема о свертке. Единичный антисимметричный тензор ε_{ijk} (символ Леви-Чивита) и теория детерминантов. Векторное и смешанное произведение векторов как свертка с ε_{ijk}. Свойства. Геометрический смысл. Свертка $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ и формула B(AC)-C(AB). Отражение системы координат. Тензоры и псевдотензоры.

2. Дифференцирование векторных полей Скалярные поля (преобразование, индуцированное инвариантностью). Векторные поля (закон преобразования). Оператор набла. Градиент – векторное поле, дивергенция – скалярное поле. Геометрический смысл. Ротор. Примеры вычисления.

3. Интегрирование векторных полей. Физический смысл дивергенции. Физический смысл ротора. Три условия потенциальности поля. Ортогональные криволинейные системы координат. Выражения для градиента, дивергенции и лапласиана в криволинейной ортогональной системе координат.

4 Скалярные и векторные поля в физике. Формулировка теоремы Гельмгольца. Векторный потенциал.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов и тем данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин (вписываются разработчиком)								
1.	Теоретическая механика	Тема 1	Тема 2	Тема 3	Тема 4					
2.	Электродинамика	Тема 1	Тема 2	Тема 3	Тема 4					
3.	Квантовая механика	Тема 1	Тема 2	Тема 3	Тема 4					
4.	Дисциплины по специальности	Тема 1	Тема 2	Тема 3	Тема 4					

5.3. Разделы и темы дисциплин (модулей)и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела	Наименование темы	Виды занятий в часах					
			Лекц.	Практ. зан.	Семин	Лаб. зан.	СРС	Всего
1.	Алгебра тензоров		5		10		4	19
2.	Дифференцирование векторных полей		5		10		4	19
3.	Интегрирование векторных полей		5		10		4	19
4.	Скалярные и векторные поля в физике		3		6		2	11
	Итого		18		36		14	68

6. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

№ п/п	№ раздела и темы дисциплины (модуля)	Наименование семинаров, практических и лабораторных работ	Трудоемкость (часы)	Оценочные средства	Формируемые компетенции
1	2	3	4	5	6
1.	1	Преобразование компонент трехмерного вектора при вращении системы координат, ортогональность матрицы вращения. Определение тензора n-го ранга.	2		ОПК-2
2.	1	Алгебра тензоров: внешнее произведение, теорема о свертке. Единичный антисимметричный тензор ε_{ijk} (символ Леви-Чивита) и теория детерминантов.	4		ОПК-2
3.	1	Векторное и смешанное произведение векторов как свертка с ε_{ijk}. Свойства. Геометрический смысл. Свертка $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ и формула B(AC)-C(AB).	2		ОПК-2
4.	2	Скалярные поля (преобразование, индуцированное инвариантностью). Векторные поля (закон преобразования	4		ОПК-2
5.	2	Оператор набла. Градиент – векторное поле, дивергенция – скалярное поле.	2		ОПК-2
6.	2	Градиент – векторное поле, дивергенция – скалярное поле. Примеры вычисления	2		ОПК-2
7.	2	. Градиент – векторное поле, дивергенция – скалярное поле. Геометрический смысл	4		ОПК-2
8.	2	Ротор. Примеры вычисления	2		ОПК-2
9.	3	Физический смысл дивергенции.	2		ОПК-2
10.	3	Физический смысл ротора	2		ОПК-2
11.	3	Три условия потенциальности поля.	4		ОПК-2
12.	3	Ортогональные криволинейные системы координат. Выражения для градиента, дивергенции и лапласиана в криволинейной ортогональной системе координат	2		ОПК-2
13.	4	Потенциальные поля.	2		ОПК-2
14.	4	Формулировка теоремы Гельмгольца. Векторный потенциал.	2		ОПК-2

6.1. План самостоятельной работы студентов

№	Тема	Вид самостоя-	Задание	Рекомендуемая	Количество

нед.		тельной работы		литература	часов
1-4	Алгебра тензоров	Внеаудиторная, решение задач	1 (задачи параграфов 1,2), 3 (№№1-8)	1, 2,3	4
5-11	Дифференцирование векторных полей	Внеаудиторная, решение задач	3 (№№19-18)	2,3,7	4
12-16	Интегрирование векторных полей	Внеаудиторная, решение задач	4 (№№1-15)	1,2,4,5	4
16-17	Скалярные и векторные поля в физике	Внеаудиторная, решение задач	4 (№№17-21)	4,7	2

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Основная задача высшего образования заключается в формировании творческой личности специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности.
Самостоятельная работа реализуется:
1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий - на лекциях, практических и семинарских занятиях, при выполнении лабораторных работ.
2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания - на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.
3. В библиотеке, дома, в общежитии, на кафедре при выполнении студентом учебных и творческих задач.
Границы между этими видами работ достаточно размыты, а сами виды самостоятельной работы пересекаются. Таким образом, самостоятельной работа студентов может быть как в аудитории, так и вне ее.
В стандартах высшего профессионального образования на внеаудиторную работу отводится не менее половины бюджета времени.

7. Примерная тематика курсовых работ (проектов): не предусмотрено.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):

а) основная литература

1. Сокольников И.С. Тензорный анализ: Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред, 2007. (100)
2. Батыгин В.В., Топтыгин Н.Н. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности, 2010. (в библиотеке 100 экз.)

б) дополнительная литература Сверено с НБ ЧГУ

3. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу, 2009 (10)
4. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды, 2002 (31)

в) программное обеспечение: не предусмотрено

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

базы данных, информационно-справочные и поисковые системы: интернет ресурсы в свободном доступе, на сайте ИГУ www.isu.ru и физического факультета ИГУ.

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля):

Для проведения занятий лекционного типа в качестве демонстрационного оборудования используется меловая доска. Наглядность обеспечивается путем изображения схем, диаграмм и формул с помощью мела. Использование глобальной компьютерной сети позволяет обеспечить доступность Интернет-ресурсов и реализовать самостоятельную работу студентов. На лекциях могут использоваться мультимедийные средства: роектор, переносной экран, ноутбук. На факультете имеется компьютеризированная аудитория, предназначенная для самостоятельной работы, с неограниченным доступом в Интернет.

Материалы: учебно-методические пособия, задания для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

10. Образовательные технологии:

Задачи изложения и изучения дисциплины реализуются в следующих формах деятельности:

- лекции, нацеленные на получение необходимой информации, и ее использование при решении практических задач;
- практические занятия, направленные на активизацию познавательной деятельности студентов и приобретения ими навыков решения практических и проблемных задач;
- консультации –еженедельно для всех желающих студентов;
- самостоятельная внеаудиторная работа направлена на приобретение навыков самостоятельного решения задач по дисциплине;
- текущий контроль за деятельностью студентов осуществляется на лекционных и практических занятиях в ходе самостоятельного решения задач, в том числе у доски.

11. Оценочные средства (ОС)

Фонд оценочных средств представлен в приложении.

11.1. Оценочные средства для входного контроля: не требуются.

11.2. Оценочные средства текущего контроля.

1. Установить правильную последовательность кратности интегралов в порядке возрастания (кратность 1, кратность 2, кратность 3: А) объемный, В) криволинейный, С) поверхностный.
2. Запишите буквы, соответствующие правильной интерпретации правила суммирования Эйнштейна.

A. $\sum a_i b_i = a_i b_i$	B. $\sum a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
C. $\sum a_i b_p = a_i b_p$	D. $\sum a_i b_i = a_k b_k$

3. Закон преобразования компонент радиус-вектора при повороте системы координат на угол φ имеет вид

A. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	B. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	D. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

4. Формулой $\sum_{j=1}^{3} A_j \cdot A_j = A_j A_j$ задается

A. Модуль вектора	B. Направляющий косинус
C. Скалярное произведение вектора самого на себя	D. Квадрат модуля вектора

5. Дельта Кронекера

A. Симметричный символ	B. Антисимметричный символ
C. Соответствует единичной матрице	D. Не соответствует единичной матрице

6. Условие ортогональности имеет вид

A. $a^T a = I$	B. $a^T = a^{-1}$
C. $a^T = a$	D. $a^T a = a^{-1}$

7. Углов Эйлера

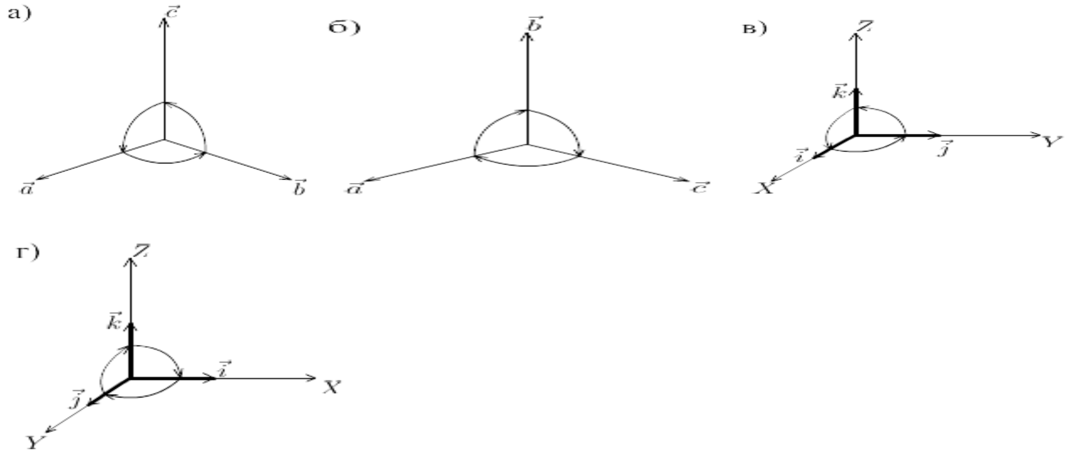
A. 1	B. 2
C. 3	D. 4

8. Укажите теорему, не относящуюся к алгебре тензоров

A. О свёртке	B. О внешнем произведении
C. Об ортогональности	D. О сумме

9. Символ Леви-Чивита

A. Скаляр	B. Вектор
C. Тензор второго ранга	D. Тензор тртьего ранга



10. На каком из рисунков изображена правая система координат.

11. Что из перечисленного является дифференциальным оператором

A. градиент	B. дивергенция
C. ротор	D. лапласиан

12. В приведенном вычислении

$$\vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial \sqrt{x_l x_l}}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_l x_l}}\frac{\partial x_m x_m}{\partial x_i}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r}\left(x_l \frac{\partial x_l}{\partial x_i} + \frac{\partial x_l}{\partial x_i} x_l\right) = \frac{1}{2r}\left(x_l \delta_{li} + \delta_{li} x_l\right) =$$
$$= \frac{1}{2r}\left(x_i + x_i\right) = \frac{x_i}{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r}.$$

вычислен

A. градиент	B. дивергенция
C. ротор	D. лапласиан

13. Геометрический смысл $\frac{\vec{r}}{r}$

A. Вектор ортогональный к ортам	B. Единичный вектор в направлении радиус-вектора
C. Орт системы координат	D. Дивергенция поля радиус-вектора

14. Матрица вращения a_{ij} в преобразовании поворота $A'_i = a_{ij} A_j$

A. ортогональна	B. антисимметрична
C. симметрична	D. вырождена

15. Записать формулу для двойного векторного произведения «бац» минус «цаб».
16. Записать по порядку буквы, соответствующие операциям векторного анализа градиент, дивергенция, ротор, лапласиан.

A. $\vec{\nabla}\vec{A}$	B. $\vec{\nabla}\vec{\nabla}$
C. $\vec{\nabla}\times\vec{A}$	D. $\vec{\nabla}\varphi$

17. Укажите букву для неверного высказывания.
Потенциальное векторное поле имеет следующее свойства

A. безвихревое	B. циркуляция по замкнутому контуру равна нулю
C. выражается в виде ротора векторного поля	D. выражается в виде градиента скалярного поля

18. Запишите буквы, соответствующие правильным формулировкам теорем Гаусса и Стокса соответственно.

A. $\iint\limits_S rot\vec{A}d\vec{s} = \oint\limits_L \vec{A}d\vec{l}$	B. $\iiint\limits_V Adv = \iint\limits_S div\vec{A}ds$
C. $\iint\limits_S \vec{A}d\vec{s} = \oint\limits_L rot\vec{A}d\vec{l}$	D. $\iiint\limits_V div\vec{A}dv = \iint\limits_S \vec{A}d\vec{s}$

19. Запишите буквы, соответствующие правильным свойствам дивергенции.

A. Скалярное поле	B. Указывает на направление роста скалярного поля
C. Векторное поле	D. Плотность источников поля

20. Запишите буквы, соответствующие правильным свойствам ротора.

A. Скалярное поле	B. Указывает на направление роста скалярного поля
C. Векторное поле	D. Плотность источников поля

11.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации (в форме экзамена или зачета).

Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов:

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1.	Проверка решений задач	Алгебра тензоров	ОПК-2
2.	Контрольная работа, проверка решений задач	Дифференцирование векторных полей	ОПК-2
3.	Контрольная работа, проверка решений задач, собеседование по теме	Интегрирование векторных полей	ОПК-2
4.	проверка решений задач	Скалярные и векторные поля в физике	ОПК-2

Демонстрационный вариант контрольной работы №1

1. Вектор, модуль которого равен 10, составляет равные углы с осями координат в системе $OXYZ$. Найти его компоненты в системе координат $OX'Y'Z'$, повёрнутой относительно исходной на углы Эйлера $\varphi = 0$, $\theta = \Pi$, $\psi = \Pi/2$.

2. Записать в развёрнутой форме выражения: $a_{ij}x_j$, $a_{ij}x_i x_j$, $a_{im}b_{jm}$, a_{ii}, $a_{ij}x_i$, $a_{ij}x_i y_j$, $a_{ijk}x_j x_k$, $\dfrac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_j}dx_j$, $\dfrac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$.

3. Упростить выражения: $\delta_{ik}\delta_{jk}$, $\delta_{ik}x_k$, $\delta_{ij}x_i x_j$, δ_{ii}, $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}$.

Демонстрационный вариант контрольной работы №2

1. Доказать тождества:

$$a)\quad (\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\cdot(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C});$$

$$b)\quad \begin{aligned}&(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = [\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})]\cdot\vec{C} - [\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})]\cdot\vec{D} =\\ &= [\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})]\cdot\vec{B} - [\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{B})]\cdot\vec{A}.\end{aligned}$$

2. Записать в инвариантной векторной форме:

$$a)\quad \varepsilon_{inl}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{stp}a_n a_r b_m c_t;$$

$$b)\quad \varepsilon_{inl}\varepsilon_{krs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{stp}a_r a'_n b_k b'_i c_t c'_m.$$

Вопросы и задания к зачету

Вопросы

1. Преобразование компонент трехмерного вектора при вращении системы координат, ортогональность матрицы вращения
2. Определение тензора n-го ранга
3. Алгебра тензоров: внешнее произведение, теорема с свертке
4. Единичный антисимметричный тензор ε_{ijk} (символ Леви-Чивита) и теория детерминантов

5. Векторное и смешанное произведение векторов как свертка с ε_{ijk} Свойства Геометрический смысл

6. Свертка $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ и формула B(AC)-C(AB)

7. Отражение системы координат

8. Тензоры и псевдотензоры

9. Скалярные поля (преобразование, индуцированное инвариантностью)

10. Векторные поля (закон преобразования)

11. Градиент - векторное поле, дивергенция - скалярное поле Геометрический смысл

12. Ротор, примеры вычисления

13. Криволинейные и поверхностные интегралы II-го рода

14. Приемы вычисления

15. Физический смысл дивергенции

16. Физический смысл ротора

17. Три условия потенциальности поля

18. Ортогональные криволинейные системы координат

19. Выражения для градиента, дивергенции и лапласиана в криволинейной ортогональной системе координат

Примеры заданий

1. Вычислить $div(\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r}))$, $\vec{a} = const$.
2. Вычислить $rot(e^{kr}(\vec{a} \times \vec{r}))$, k=const, $\vec{a} = const$.
3. Вычислить $rot(\vec{a}\vec{r})\vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b} = const$
4. Вычислить $rot\frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{r})$, $\vec{a} = const$
5. Вычислить $grad\,\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$, $\vec{p} = const$.
6. . Вычислить $\Delta\frac{1}{r}$.
7. Вычислить $rot(\vec{a} \times \vec{b})$ и $div(\vec{a} \times \vec{b})$
8. . Вычислить $div(\vec{a}\vec{r})\vec{r}$.
9. Доказать, что для замкнутой поверхности $\int(\vec{\nabla} \times \vec{A})d\vec{s} = 0$.
10. Вычислить $div((\vec{a} \times \vec{r})\vec{r})$
11. Показать, что последовательно проделанные преобразования двумерного поворота с углами φ_1 и φ_2 эквивалентны одному повороту с углом $(\varphi_1 + \varphi_2)$.
12. Определить компоненты вектора $\vec{A}$, если $|\vec{A}|^2 = 2$ и углы, образуемые вектором $\vec{A}$ и ортами системы координат, равны. Найти его компоненты в системе $OX'Y'$, повёрнутой относительно OXY на 30°.
13. Показать прямым вычислением, что матрица преобразования компонент двумерного вектора при поворотах $a_{ij}(\varphi)$ ортогональна.
14. Вектор $\vec{A}$ имеет компоненты $A_x = 1$, $A_y = 3$ в системе OXY. Существует поворот, переводящий её в систему $OX'Y'$, в которой эти компоненты равны $A_{x'} = 2$, $A_{y'} = 2$? Существует ли система $OX''Y''$, в которой его компоненты равны

$A_{x''} = -3$, $A_{y''} = 1$? Если такая система существует, на какой угол она повёрнута относительно исходной? Решить задачу в общем виде для произвольных A_x, A_y и $A_{x'}$, $A_{y'}$.

15. Записать матрицу вращения с параметрами Эйлера $\varphi = 0$, $\theta = \pi$, $\psi = \frac{\pi}{2}$. Интерпретировать соответствующее преобразование геометрически.

12. Упростить выражения: $\delta_{ik}\delta_{jk}$, $\delta_{ik}x_k$, $\delta_{ij}x_i x_j$, δ_{ii}, $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}$.

13. Доказать, что левая и правая обратные матрицы равны.

14. Показать, что $(a \cdot b)^T = b^T \cdot a^T$.

15. Показать, что тензорное уравнение $a_{ij}\lambda_j = \alpha\lambda_i$, где α — инвариант, λ_i — произвольный вектор, требует, чтобы $a_{ij} = \alpha\delta_{ij}$.

16. Показать, что свёртка симметричного тензора S_{ij} и антисимметричного тензора A_{ij} равна нулю: $S_{ij}A_{ij} = 0$.

17. Доказать непосредственно, пользуясь законом преобразования компонент тензора, что симметрия и антисимметрия тензора представляют собой инвариантное относительно вращений системы координат свойство.

18. Вывести правило Крамера, пользуясь известным свойством алгебраических дополнений: $a_{ij}A_{ik} = a\delta_{jk}$, где $a = \det(a_{ij})$.

19. Доказать, что компоненты антисимметричного тензора второго ранга при вращениях преобразуются как компоненты вектора.

20. Доказать, что

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im}$$

21. Вычислить (не применяя теорему Гаусса) интеграл $\frac{1}{3}\int_S r \cdot dS$, взятый по поверхности единичного куба, который определён точкой $(0,0,0)$ и единичными отрезками в положительных направлениях осей x, y, z.

22. Доказать, что $\int_S dS = 0$, если S — замкнутая поверхность.

23. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \le h^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h$ в сторону внешней нормали.

24. Применяя формулу Гаусса, вычислить поток векторного поля $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + (z-y)\vec{j} + (z-x)\vec{k}$ через: а) повехность пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, в сторону внешней нормали; б) сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в сторону внешней нормали.

25. Показать, что для любой замкнутой поверхности S $\int_S B \cdot dS = 0$, если $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

26. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = (z+1)\vec{k}$ через: а) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$, в сторону внешней нормали к сфере; б) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$, в сторону внутренней нормали к сфере; в) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \ge 0$, в сторону внешней нормали к сфере.

27. Найти циркуляцию плоского векторного поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ вдоль произ-

вольного замкнутого кусочно-гладкого контура L, лежащего в плоскости OXY и ограничивающего область ϕ площади S.

28. Указать ошибку в следующих рассуждениях. Уравнение Максвелла для магнитного поля $\vec{H}$ имеет вид $\nabla \vec{H} = 0$, поэтому $\vec{H}$, как известно, может быть представлено в виде ротора некоторого векторного поля $\vec{A}$ (векторный потенциал): $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Применяя теоремы Гаусса и Стокса, получаем:

$$0 = \int\limits_V \vec{\nabla}\vec{H}dV = \int\limits_S \vec{H}d\vec{S} = \int\limits_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\limits_L \vec{A} \cdot d\vec{l},$$

но так как $\vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$ (условие потенциальности поля), то $\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi$.

Значит, $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$, т. е. все магнитные поля обядзательно равны нулю!?

С помощью формулы Стокса найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ вдоль замкнутого контура L, состоящего из отрезка винтовой линии $r(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + bt \cdot \vec{k}$ ($0 \le t \le 2\pi$) и отрезка прямой, соединяющей точки B $(a,0,2\pi b)$ и A $(a,0,0)$, причём обход контура совершается так, что по отрезку прямой движение происходит от точки B к точке A.

29. Задано поле сил $\vec{F} = -\dfrac{\vec{i}y}{x^2+y^2} + \dfrac{\vec{j}x}{x^2+y^2}$.

Определить работу, совершаемую при движении по окружности единичного радиуса против часовой стрелки от 0 до π и по часовой стрелке от 0 до π (окружность лежит в плоскости xy). Напомним, что работа, вообще говоря, зависит от выбора пути.

30. Найти скалярный потенциал для гравитационной силы.

31. Доказать, что векторное поле $\vec{a} = f(r)\vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, является потенциальным, и найти потенциал этого поля.

32. Является ли поле сил $\vec{F} = \vec{i}f_1(x) + \vec{j}f_2(x) + \vec{k}f_3(x)$ потенциальным? Определить его потенциал, если это возможно.

33. Определить, какие из приведённых полей являются потенциальными:

$$\vec{F} = \vec{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2} + \vec{j}\,\frac{x}{x^2+y^2}; \quad \vec{F} = \vec{i}\,\frac{y}{r} - \vec{j}\,\frac{x}{r},\ r = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$\vec{F} = \vec{i}xf(r) + \vec{j}yf(r) + \vec{k}zf(r),\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

34. Записать выражение градиента скалярного поля U в цилиндрических координатах. Выразить ротор и дивергенцию векторного поля $\vec{A}$ в цилиндрических координатах.

35. Показать, что якобиан $I = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}$ перехода к криволинейной ортогональной системе координат q_1, q_2, q_3 равен произведению коэффициентов Ламэ $h_1 h_2 h_3$ и, следовательно, элемент объёма $I dq_1 dq_2 dq_3$ равен $h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$.

36. Выразить единичные векторы сферической системы координат через декартовы.

Разработчики:

_______________ доцент кафедры теоретической физики Б.В. Мангазеев
(подпись)

Программа рассмотрена на заседании кафедры теоретической физики

«13» мая 2016 г.

Протокол № 8 Зав. кафедрой _______________ С.В. Ловцов

Лист согласования, дополнений и изменений на 2017/2018 учебный год

К рабочей программе дисциплины Б1.Б.14.4 Векторный и тензорный анализ по направлению 03.03.02 Физика профилю Физика конденсированного состояния

В рабочую программу дисциплины вносятся следующие дополнения: нет дополнений.

Изменения одобрены Ученым советом физического факультета,
протокол №8 от 19.06.2017 г.

Зав. кафедрой теоретической физики С.В. Ловцов